

BAC 2020

Exercice N° 01 : Principal 2020 – 4 points

On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = 2 \times 5^n + 7$

- 1) a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, a_n est impair
- b) Déterminer suivant n , le reste modulo 8 de 5^n
- c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \equiv 1 \pmod{8}$

- 2) a) Montrer que

$$\text{si } \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{8} \\ x \equiv 7 \pmod{125} \end{cases} \text{ alors } x \equiv 257 \pmod{1000}$$

- b) montrer que pour $n \geq 3$, $a_n \equiv 257 \pmod{1000}$

- c) Quels sont les trois derniers chiffres de l'entier :

$$(2 \times 5^{2020} + 7)(2 \times 5^{2021} + 7) ?$$

- 3) a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$
- b) Soit d le PBCD de a_{2n} et a_{2n+1} . Montrer que $d \neq 7$.
- c) Trouver alors d

Exercice N° 02 : Contrôle 2020 – (4 points)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et r le reste modulo 7 de k

- 1) Montrer chacun des résultats suivants :

$$k^3 \equiv 1 \pmod{7} \text{ si et seulement si } r \in \{1, 2, 4\}$$

$$k^3 \equiv 6 \pmod{7} \text{ si et seulement si } r \in \{3, 5, 6\}$$

$$k^3 \equiv 0 \pmod{7} \text{ si et seulement si } r = 0$$

- 2) Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Déterminer les restes possibles modulo 7 de $x^3 + y^3$

- 3) Soit $a \in \mathbb{N}^*$.

On désigne par $E_a = \{(x, y) \in \mathbb{N}^*, x^3 + y^3 = a\}$

Montrer que les équations :

$$x^3 + y^3 = 3 \pmod{7} \text{ et } x^3 + y^3 = 4 \pmod{7}$$

n'admettent pas de solutions dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

- 4) On considère l'ensemble E_{9990} . Supposons qu'il existe

$(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $(x, y) \in E_{9990}$

- a) Montrer alors que $x \equiv 0 \pmod{7}$ ou $y \equiv 0 \pmod{7}$

- b) Déterminer E_{9990} .

BAC 2019

Exercice N° 03 : Principal 2019 – 5 points

- 1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $29x - 13y = 6$

- a) Vérifier que $(2, 4)$ est une solution de (E)

- b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E)

Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E') : $x^{19} \equiv -2 \pmod{29}$

- 2) Justifier que $2^{28} \equiv 1 \pmod{29}$ et en déduire que -8 est une solution de (E')

- 3) Soit x_0 une solution de (E')

- a) Montrer que x_0 n'est pas un multiple de 29 et en déduire alors que $x_0^{28} \equiv 1 \pmod{29}$

- b) Montrer que $x_0^{57} \equiv -8 \pmod{29}$ puis que $x_0 \equiv -8 \pmod{29}$

- c) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E')

- d) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x - 3)^{19} \equiv -2 \pmod{29}$

- 4) Résoudre dans le système
$$\begin{cases} (x - 3)^{19} \equiv -2 \pmod{29} \\ (x - 3)^{13} \equiv -2 \pmod{13} \end{cases}$$

Exercice N° 04 : Contrôle 2019 – (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les plans P_1 et P_2 d'équations respectives :

$$P_1 : 3x - 2y - 2z = 1 \text{ et } P_2 : 4x - 11y + 2z = 0$$

- 1) a) Montrer que P_1 et P_2 se coupent suivant une droite Δ
- b) Donner une représentation paramétrique de Δ

Dans la suite de l'exercice, on se propose de déterminer les points de Δ à coordonnées entières

- 2) On considère dans l'équation (E) $7x - 13y = 1$.

Vérifier que $(2, 1)$ est une solution de (E) et résoudre (E).

- 3) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le système (S) :
$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 1 \\ 4x - 11y + 2z = 0 \end{cases}$$

- a) Montrer que (x, y, z) est solution de (S) si et seulement si

$$\begin{cases} 7x - 13y = 1 \\ 2z = 11y - 4x \end{cases}$$

- b) Déduire l'ensemble des points de Δ à coordonnées entières

BAC 2018

Exercice N° 05 : Principal 2018 – 5 points

- A) Soit q un entier naturel

- 1) Montrer que q^2 est impair si et seulement si q est impair

- 2) Montrer que si q est impair alors $q^2 \equiv 1 \pmod{8}$

- B) On se propose de déterminer l'ensemble A des triplets d'entiers non nuls (m, n, p) tel que $2^{2m} + 3^{2n} = q^2$

- 1) Vérifier que le triplet $(2, 1, 5)$ est un élément de A

Dans la suite de l'exercice, on suppose que (m, n, p) est un élément de A .

- 2) a) Montrer que q est impair
b) Montrer que $q^2 - 3^{2n} \equiv 0 \pmod{8}$
c) Montrer alors que m est différent de 1
- 3) On suppose que $m \geq 2$
a) Justifier que les entiers $(q - 3^n)$ et $(q + 3^n)$ sont pairs
b) Soit $d = (q - 3^n) \wedge (q + 3^n)$
Montrer que d divise $2q$ et que d divise 2^{2m} .
En déduire que $d = 2$
c) Montrer que $q - 3^n = 2$ et que $q + 3^n = 2^{2m-1}$
Déduire que $q = 2^{2m-2} + 1$ et que $3^n = 2^{2m-2} - 1$
- 4) Déterminer n et q lorsque $m = 2$
- 5) On suppose que $m \geq 3$
a) Montrer que $3^n \equiv -1 \pmod{16}$
b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier k , les restes possible de 3^k dans la division euclidienne par 16.
c) En déduire qu'il n'existe pas de triplet (m, n, q) éléments de l'ensemble A tel que $m \geq 3$.
- 6) Déterminer l'ensemble A .

BAC 2017

Exercice N° 06 : Principal 2017 - 4 points

- 1) Soit x un entier non nul premier avec 53
a) Déterminer le reste modulo 53 de x^{52}
b) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}, x^{52k+1} \equiv x \pmod{53}$
- 2) Soit l'équation $(E_1) : x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$ où $x \in \mathbb{Z}$
Montrer que 2^9 est une solution de (E_1)

- 3) Soit x une solution de l'équation (E_1)
a) Montrer que x est premier avec 53
b) Montrer que $x^{261} \equiv x \pmod{53}$
c) En déduire que $x \equiv 2^9 \pmod{53}$
- 4) a) Montrer que $2^9 \equiv 35 \pmod{53}$
b) Donner alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de (E_1)
- 5) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E_2) : 71u - 53v = 1$
a) Vérifier que $(3, 4)$ solution de l'équation (E_2)
b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2)
- 6) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 34 \pmod{71} \\ x^{29} \equiv 2 \pmod{53} \end{cases}$

BAC 2016

Exercice N° 07 : Principal 2016 - 4 points

- 1) Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a \equiv 1 \pmod{2^4}$ et $a \equiv 1 \pmod{5^4}$.
Montrer que $a \equiv 1 \pmod{10^4}$
- 2) Soit $b = (9217)^4$.
Montrer que $b \equiv 1 \pmod{5}$ et $b \equiv 1 \pmod{2^4}$
- 3) a) Pour tout entier naturel n , on pose $b_n = b^{5^n} - 1$.
Montrer que $b_{n+1} = (b_n + 1)^5 - 1$
b) En déduire que pour tout entier naturel n on a :
$$b_{n+1} = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n$$
- 4) a) Montrer que si 5^{n+1} divise b_n alors 5^{n+2} divise b_n^5
b) Montrer, par récurrence que pour tout entier naturel n ,
 $b_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}}$
- 5) a) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{625}$
b) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{10\,000}$
c) Trouver un entier dont le cube est congru à 9217 modulo 10 000

Exercice N° 08 : Contrôle 2016 - 4 points

Soit a un entier naturel non nul et premier avec 5.

- 1) En utilisant les restes possibles de la division euclidienne de a par 5, montrer que $a^4 \equiv 1 \pmod{5}$
- 2) Soit p et q deux entiers naturels non nuls tels que :
 $p \leq q$ et $q \equiv p \pmod{4}$
a) Montrer que $a^q \equiv a^p \pmod{5}$
b) Montrer que $a^q \equiv a^p \pmod{2}$
c) En déduire que $a^q \equiv a^p \pmod{10}$
- 3) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 25x - 21y = 4$.
a) Vérifier que $(1, 1)$ est une solution de (E)
b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E)
c) Déduire l'ensemble A des solutions de (E) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
d) Soit (α, β) un élément de A . Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $n \wedge 5 = 1$, n^α et n^β ont le même chiffre d'unité.

BAC 2015

Exercice N° 09 : Principal 2015 - 4 points

- 1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 47x + 53y = 1$
a) Vérifier que $(-9, 8)$ est une solution de (E)
b) Résoudre l'équation (E)
c) Déterminer l'ensemble des inverses de 47 modulo 53
d) En déduire que 44 est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53
- 2) a) Justifier que $45^{52} \equiv 1 \pmod{53}$
b) Déterminer alors le reste de 45^{106} modulo 53
- 3) Soit $N = 1 + 45 + 45^2 + \dots + 45^{105} = \sum_{k=0}^{105} 45^k$.
a) Montrer que $44N \equiv 10 \pmod{53}$
b) En déduire le reste de N modulo 53

BAC 2014

Exercice N° 10 : Principal 2014 - 4 points

points

- 1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1 \pmod{10}$
 - a) Montrer que $a^9 + a^8 + \dots + a + 1 \equiv 0 \pmod{10}$
 - b) En déduire que $a^{10} \equiv 1 \pmod{10^2}$. On pourra utiliser : $a^{10} - 1 = (a - 1)(a^9 + a^8 + \dots + a + 1)$
- 2) a) Soit $b \in \mathbb{Z}$. Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10
 - b) En déduire que $b^4 \equiv 1 \pmod{10}$ si et seulement si b est premier avec 10.
- 3) a) Soit b un entier premier avec 10. Montrer que $b^{40} \equiv 1 \pmod{10^2}$
 - b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42}

Exercice N° 11 : Contrôle 2014 - 4 points

- 1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $1111x - 10^4y = 1$
Vérifier que $(-9, -1)$ est une solution de (E).
Résoudre l'équation (E).
- 2) a) Montrer que s'il existe deux entiers p et q tels que $n = 1111p$ et $n = 1 + q10^4$ alors (p, q) solution de (E).
b) Déterminer alors l'ensemble des entiers n tels que :

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{1111} \\ n \equiv 1 \pmod{10^4} \end{cases}$$
- c) Déduire le plus petit entier naturel multiple de 1111 et dont le reste dans la division euclidienne par 10^4 est égal à 1.

BAC 2013

Exercice N° 12 : Principal 2013 - 1.5 points

Répondre par « Vrai » ou « Faux » en justifiant la réponse :

- 1) (A_1) : Soit n un entier.
"Si $33n \equiv 0 \pmod{2013}$ alors $n \equiv 0 \pmod{61}$ "
(A_2) : " L'équation (E) : $33x + 11y = 2013$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ "

Exercice N° 13 : Contrôle 2013 - 3 points

Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $2x + 5y = 6$

- 1) Vérifier que $(3, 0)$ est u solution de (E).
Résoudre (E)
- 2) a) Soit (x, y) une solution de (E).
Quelle sont les valeurs possibles de $x \wedge y$?
b) Déterminer les couples (x, y) , solutions de l'équation (E) tel que $x \wedge y = 3$

BAC 2012

Exercice N° 14 : Contrôle 2012 - 3 points

- 1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7x + 18y = 9$
 - a) Montrer que $(9, -3)$ est une solution de (E)
 - b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).
- 2) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$ le système

$$\begin{cases} n \equiv 6 \pmod{7} \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$$

BAC 2011

Exercice N° 15 : Principal 2011 - 3 points

Répondre par « vrai » ou « faux » en justifiant la réponse.

- 1) $x^3 \equiv x \pmod{2}$
- 2) si $x \equiv 2 \pmod{14}$ alors $x \equiv 1 \pmod{7}$
- 3) si $4x \equiv 10y \pmod{5}$ alors $x \equiv 0 \pmod{5}$
- 4) si $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{5} \\ y \equiv 5 \pmod{8} \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$

BAC 2010

Exercice N° 14: Principal 2010 - 3 points

Répondre par « Vrai » ou « Faux ».
Aucune justification n'est demandée.

- 1) Le quotient de (-23) par (-5) est 4
- 2) si a et b sont deux entiers tels que $64a + 9b = 1$ alors les entiers b et 64 sont premiers entre eux
- 3) $147^{146} \equiv 2 \pmod{12}$
- 4) $x^2 \equiv 0 \pmod{8}$ équivaut à $x \equiv 0 \pmod{8}$
- 5) si $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$ alors $x \equiv 19 \pmod{20}$
- 6) si p entier premier distinct de 2 alors $p^2 \equiv 1 \pmod{4}$

Exercice N° 17 : Contrôle 2010 — (5 points)

On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$

- 1) Soit n un entier naturel. Discuter suivant les valeurs de n , le reste de 7^n modulo 100.
- 2) Dédire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 100k - 1$
- 3) a) En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $a^{100} \equiv 1 [100^2]$
b) Déterminer les quatre derniers chiffres de a^{100}

BAC 2009**Exercice N° 18 : Principale 2009** — (QCM)

- 3) Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = 2^n + 3^n$, alors $a_n \equiv 0 \pmod{5}$ pour :
a) tout entier naturel n pair
b) tout entier naturel n
c) tout entier naturel n impair

Exercice N° 19 : Contrôle 2009 — 3 points

Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $3x + 4y = -8$

- 1) a) Vérifier que $(0, -2)$ est une solution de (E)
b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E)
- 2) Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, Soit la droite $\Delta : 3x + 4y + 8 = 0$ et on désigne par A le point de Δ d'abscisse 0.
a) Montrer que si M est un point de Δ à coordonnées entières alors AM est multiple de 5.
b) Soit $N(x, y) \in \Delta$. Vérifier que : $AN = \frac{5}{4}|x|$
c) En déduire que si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

BAC 2008**Exercice N° 20 : Principale 2008** — 3 points

- 1) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x - 8y = 5$
- 2) a) Soit n, x et y : 3 entiers tels que :
$$\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$$
 Montrer que (x, y) est une solution de (E).
b) On considère le système (S)
$$\begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 7 \pmod{8} \end{cases}$$
 Montrer que n est une solution du système (S) si et seulement si $n \equiv 23 \pmod{24}$.
- 3) a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de 2^{2^k} modulo 3 et le reste de : 7^{2^k} modulo 8
b) Vérifier que 1991 est solution de (S) et montrer que l'entier $(1991)^{2008} - 1$ est divisible par 24.

Exercice N° 21 : Contrôle 2008 — (QCM) 1 point

Cocher la bonne réponse. Sans justification

- 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(5n) \wedge (3^2 \times 5^3 \times 7) = 35$.
Alors : a) $n \equiv 0 \pmod{3}$
b) $n \equiv 0 \pmod{5}$
c) $n \equiv 0 \pmod{7}$

Section : MATHEMATIQUES

Correction de la série

Arithmétique aux BAC

entre 2008 et 2020

Etablie par : **Mr M. MAAOUIA**

98 600 618 - 20 810 290

e-mail : moez-maaouia@hotmail.com

Exercice N° 01 : Principale 2020

$$a_n = 2 \times 5^n + 7$$

1) a) on a $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \times 5^n \equiv 0 [2]$
 $\text{et } 7 \equiv 1 [2]$

$$\Sigma : 2 \times 5^n + 7 \equiv 1 [2]$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n \equiv 1 [2] \Rightarrow a_n : \text{impair}$$

b) $\left. \begin{array}{l} 5^0 \equiv 1 [8] \\ 5^1 \equiv 5 [8] \\ 5^2 \equiv 25 \equiv 1 [8] \end{array} \right\} < \begin{array}{l} 5^{2p} \equiv 1 [8] \\ 5^{2p+1} \equiv 5 [8] \end{array}$

on a : si n : pair $\Rightarrow 5^n \equiv 1 [8]$
 si n : impair $\Rightarrow 5^n \equiv 5 [8]$

c) si n : pair $\Rightarrow 5^n \equiv 1 [8]$

d'où $2 \times 5^n \equiv 2 [8]$

alors $2 \times 5^n + 7 \equiv 1 [8] \quad (1)$

• si n : impair $\Rightarrow 5^n \equiv 5 [8]$

d'où $2 \times 5^n \equiv 2 [8]$

alors $2 \times 5^n + 7 \equiv 1 [8] \quad (2)$

(1) et (2) $\rightarrow 2 \times 5^n + 7 \equiv 1 [8]$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \boxed{a_n \equiv 1 [8]}$

2) $x \equiv 1 [8] \Leftrightarrow x \equiv 1 + 32k [8]$

$\Leftrightarrow x \equiv 257 [8] \quad (1)$

et $x \equiv 7 [125] \Leftrightarrow x \equiv 7 + 125k [125]$

$\Rightarrow x \equiv 257 [125] \quad (2)$

(1) et (2) $\rightarrow \begin{cases} x \equiv 257 [8] \\ x \equiv 257 [125] \end{cases}$

Comme $8 \wedge 125 = 1 \Rightarrow$ d'après le

théorème de Gauss :

$$x \equiv 257 [8 \wedge 125]$$

$$\Rightarrow \boxed{x \equiv 257 [1000]}$$

b) on a déjà $a_n \equiv 1 [8] \quad (1)$

et si $n \geq 3 \Rightarrow 5^n \equiv 0 [5^3]$

$\Rightarrow 2(5^n) \equiv 0 [125]$

d'où $2 \times 5^n + 7 \equiv 7 [125]$

$\Rightarrow a_n \equiv 7 [125] \quad (2)$

(1) et (2) $\Rightarrow \begin{cases} a_n \equiv 1 [8] \\ a_n \equiv 7 [125] \end{cases} \Rightarrow a_n \equiv 257 [1000]$

c) $(2 \times 5^{2020} + 7) \cdot (2 \times 5^{2021} + 7) = a_{2020} \cdot a_{2021}$

or $a_n \equiv 257 [1000] \quad \forall n \geq 3$

$\Rightarrow \begin{cases} a_{2020} \equiv 257 [1000] \\ a_{2021} \equiv 257 [1000] \end{cases} \Rightarrow$

$a_{2020} \cdot a_{2021} \equiv (257)^2 [1000]$

$\Rightarrow a_{2020} \cdot a_{2021} \equiv 49 [1000]$

alors les 3 derniers chiffres de

$a_{2020} \cdot a_{2021}$ sont $\boxed{049}$

3) a) $2a_{2n} - a_{2n+1} = [2(5^{2n} + 7)] - [2 \times 5^{2n+1} + 7]$
 $= 10(5^{2n}) + 35 - 10(5^{2n}) - 7 = 28$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \boxed{5a_{2n} - a_{2n+1} = 28}$

b) $d = a_{2n} \wedge a_{2n+1}$

Par l'absurde, on suppose que $d = 7$

$\Rightarrow 7 \mid 2 \times 5^{2n} + 7 \Rightarrow 7 \mid 2 \times 5^{2n} \Rightarrow 7 \mid 5^{2n}$
 $7 \wedge 2 = 1$

$$\begin{aligned}
 5^0 &\equiv 1(7) \\
 5^1 &\equiv 5(7) \\
 5^2 &\equiv 4(7) \\
 5^3 &\equiv 6(7) \\
 5^4 &\equiv 2(7) \\
 5^5 &\equiv 3(7) \\
 5^6 &\equiv 1(7)
 \end{aligned}
 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 5^n \neq 0(7)$$

d'où 7 ne divise pas 5^n

absurde

$\Rightarrow \boxed{d \neq 7}$

$$\begin{aligned}
 c) \quad d \mid a_{2n} \Rightarrow d \mid 5a_{2n} - a_{2n+1} \\
 d \mid a_{2n+1} \Rightarrow d \mid 28
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } d \in \mathbb{D}_{28}^+ = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$

$$\text{or } d \neq 7$$

$$\text{et } a_n : \text{impair } \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{2n} : \text{impair}$$

$$\Rightarrow d \notin \{2, 4, 14, 28\} \Rightarrow d = 1$$

et $d \neq 7$

$$\text{Concl. : } \boxed{a_{2n} \wedge a_{2n+1} = 1}$$

Exercice N° 02 Contrôle 2020

$$k \in \mathbb{N}^* \quad / \quad k \equiv r(7)$$

1) Le tableau des restes modulo 7 de k^3 :

k	0	1	2	3	4	5	6
k^3	0	1	1	6	1	6	6

$$\text{d'où } k^3 \equiv 1(7) \Rightarrow r \in \{1, 2, 4\}$$

$$\text{et } k^3 \equiv 6(7) \Rightarrow r \in \{3, 5, 6\}$$

$$\text{et } k^3 \equiv 0(7) \Rightarrow r = 0$$

2) les tableau des restes modulo 7 de $x^3 + y^3$

$x^3 + y^3$	x^3			
	0	1	-6	
y^3	0	0	1	-6
	1	1	2	0
	6	6	0	5

$\Rightarrow$ les restes possibles de $x^3 + y^3$ sont : $\{0, 1, 2, 5, 6\}$

3) $a \in \mathbb{N}^*$, $E_a = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / x^3 + y^3 = a\}$

D'après le tableau des restes modulo 7 de $x^3 + y^3$ précédent, on a :

les restes possibles sont : $\{0, 1, 2, 5, 6\}$

d'où $x^3 + y^3 \not\equiv 4(7)$

et $x^3 + y^3 \not\equiv 3(7)$

$$4) (x, y) \in E_{9990} \Rightarrow x^3 + y^3 = 9990$$

$$a) \quad 9990 \equiv 1(7)$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 \equiv 1(7)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 \equiv 0(7) \text{ et } y^3 \equiv 1(7) \\ \text{ou} \\ x^3 \equiv 1(7) \text{ et } y^3 \equiv 0(7) \end{cases}$$

$$\text{or } x^3 \equiv 0(7) \Rightarrow x \equiv 0(7)$$

$$\text{et } y^3 \equiv 0(7) \Rightarrow y \equiv 0(7)$$

$$\text{Concl. : } (x, y) \in E_{9990} \Rightarrow x \equiv 0(7) \text{ ou } y \equiv 0(7)$$

$$b) \text{ si } x \equiv 0(7) \Rightarrow y^3 \equiv 1(7) \Rightarrow \begin{cases} y \equiv 1(7) \\ y \equiv 2(7) \\ y \equiv 4(7) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (7k, 1+7k'), (7k, 2+7k'), (7k, 4+7k') \in E_{9990}$$

$$\bullet \text{ si } y \equiv 0(7) \Rightarrow x^3 \equiv 1(7) \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 1(7) \\ \text{ou} \\ x \equiv 2(7) \\ \text{ou} \\ x \equiv 4(7) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1+7k, 7k'), (2+7k, 7k'), (4+7k, 7k') \in E_{9990}$$

Concl. :

$$E_{9990} = \left\{ (7k, 1+7k'), (7k, 2+7k'), (7k, 4+7k'), (1+7k, 7k'), (2+7k, 7k'), (4+7k, 7k') \right\}$$

Exercice N° 03 : Principale 2019

1) (E): $29x - 13y = 6$

a) $29(2) - 13(4) = 58 - 52 = 6$ vérifié
 $\Rightarrow (2, 4)$ est une solution particulière de l'équation (E)

b) (E): $29x - 13y = 29(2) - 13(4)$

$\Rightarrow 29(x-2) = 13(y-4)$

$29 \wedge 13 = 1 \Rightarrow$ d'après Gauss:

$13 \mid x-2 \Rightarrow x-2 = 13k \Leftrightarrow$

$x = 2 + 13k$

ainsi $29(2+13k-2) = 13(y-4)$

$\Rightarrow 29k = y-4 \Rightarrow y = 4 + 29k$

Réciproquement:

$29(2+13k) - 13(4+29k) = 6$ vér.

$S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(2+13k, 4+29k) / k \in \mathbb{Z}\}$

(E'): $x^{19} \equiv -2 [29]$

2) 29 premier
 et 29 ne divise pas 2 $\Rightarrow$ d'après

le thém de Fermat $2^{28} \equiv 1 [29]$

$\bullet (-8)^{19} = [(-2)^3]^{19} = (-2)^{57} = (-2)(-2)^{56}$
 $= (-2)(2)^{28 \cdot 2}$

or $2^{28} \equiv 1 [29] \Rightarrow 2^{56} \equiv 1 [29]$

d'où $(-8)^{19} = (-2)(2)^{56} \equiv -2 [29]$

concl: -8 est une solution de (E')

$\Rightarrow$ a) x_0 : sol de (E') $\Rightarrow x_0^{19} \equiv -2 [29]$
 $\Rightarrow 29$ ne divise pas x_0

$\Rightarrow x_0$ n'est pas multiple de 29

d'après Fermat:

29 : premier

29 ne divise pas x_0

$\Rightarrow x_0^{28} \equiv 1 [29]$

b) x_0 : solution de (E') $\Rightarrow x_0^{19} \equiv -2 [29]$

d'où $(x_0)^{19 \cdot 3} \equiv (-2)^3 [29]$

$\Rightarrow x_0^{57} \equiv -8 [29]$

$\bullet x_0^{57} = x_0(x_0^{28})^2 \equiv x_0 [29]$ (1)

car $x_0^{28} \equiv 1 [29]$

or $x_0^{57} \equiv -8 [29]$ (2)

(1) et (2) $\rightarrow x_0 \equiv -8 [29]$

c) x_0 solution de (E') $\Rightarrow x_0 \equiv -8 [29]$

$\Rightarrow x_0 = -8 + 29k$

$S_{\mathbb{Z}} = \{-8 + 29k / k \in \mathbb{Z}\}$

d) $(x-3)^{19} \equiv -2 [29]$

on pose $x-3 = x_0 \Rightarrow x_0^{19} \equiv -2 [29]$

$\Rightarrow x-3 = -8 + 29k$

$\Rightarrow x = -5 + 29k$

$S_{\mathbb{Z}} = \{-5 + 29k / k \in \mathbb{Z}\}$

4) $\begin{cases} (x-3)^{19} \equiv -2 [29] & (1) \\ (x-3)^{13} \equiv -2 [13] & (2) \end{cases}$

$$(1) \rightarrow x = -5 + 29k_1 / k_1 \in \mathbb{Z}$$

(2): 13 premier $\Rightarrow$ d'après Fermat

$$(x-3)^{13} = (x-3) [13]$$

$$\text{ou } (x-3)^{13} = -2 [13]$$

$$\text{d'où } x-3 = -2 [13] \Rightarrow x = 1 [13]$$

$$\text{donc il existe } k_2 \in \mathbb{Z} / x = 1 + 13k_2$$

$$\text{alors on a: } \begin{cases} x = -5 + 29k_1 \\ x = 1 + 13k_2 \end{cases}$$

$$\text{d'où } -5 + 29k_1 = 1 + 13k_2$$

$$\Rightarrow 29k_1 - 13k_2 = 6$$

$$\Rightarrow (k_1, k_2): \text{ solutions de } (*) \text{ ou } (1)$$

$$\text{alors } k_1 = 2 + 13k$$

$$\text{d'où } x = -5 + 29(2 + 13k)$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 53 + 377k}$$

$$S_{\mathbb{Z}} = \{ 53 + 377k / k \in \mathbb{Z} \}$$

Exercice N° 04 Contrôle 2019.

$$P_1: 3x - 2y - 2z = 1 \quad P_2: 4x - 11y + 2z = 0$$

$$1) a) \vec{N}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \vec{N}_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ -14 \\ -25 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

alors P_1 n'est pas $\parallel$ à P_2

$$\text{d'où } P_1 \cap P_2 = \Delta$$

$$b) M(x, y, z) \in \Delta = P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 2z = 1 \\ 4x - 11y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{on pose } \boxed{z = 25\alpha} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 1 + 50\alpha \\ 4x - 11y = -50\alpha \end{cases}$$

$$4(1) - 3(2): 25y = 4 + 350\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{4}{25} + 14\alpha}$$

$$(1): 3x = \frac{8}{25} + 28\alpha + 1 + 50\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{18}{25} + 26\alpha}$$

$$\text{donc: } P_1 \cap P_2 = \Delta: \begin{cases} x = \frac{18}{25} + 26\alpha \\ y = \frac{4}{25} + 14\alpha \\ z = 25\alpha \end{cases} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$2) (E): 7x - 13y = 1$$

$$7(2) - 13(1) = 14 - 13 = 1 \text{ vérifie}$$

$\Rightarrow (2, 1):$ solution particulière de (E)

$$\text{qui prouve: } 7x - 13y = 7(2) - 13(1)$$

$$\Rightarrow 7(x-2) = 13(y-1)$$

$$\text{ou } 7 \nmid 13 \Rightarrow \text{d'après Gauss } 13 \mid x-2$$

$$\Rightarrow x-2 = 13k \Rightarrow \boxed{x = 2 + 13k}$$

$$\text{ou } 13y = 7x - 1 = 7(2 + 13k) - 1$$

$$\Rightarrow 13y = 13 + 7(13k) \Rightarrow \boxed{y = 1 + 7k}$$

$$S_{\mathbb{Z}}^2 = \{ 2 + 13k, 1 + 7k / k \in \mathbb{Z} \}$$

$$3) (S) \begin{cases} 3x - 2y - 2z = 1 \\ 4x - 11y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$a) (x, y, z): \text{ sol de } (S) \Rightarrow$$

$$(1) + (2): \begin{cases} 7x - 13y = 1 \\ 2z = 11y - 4x \end{cases}$$

$$(2) \text{ d'où } 2z = 11y - 4x$$

$$b) (x, y, z): \text{ sol de } (S) \Rightarrow 7x - 13y = 1$$

$$\Rightarrow (x, y) \text{ sol de } (E) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 13k \\ y = 1 + 7k \end{cases}$$

$$\text{ou } 2z = 11y - 4x$$

$$\Rightarrow 2z = 11(1 + 7k) - 4(2 + 13k)$$

$$\Rightarrow 2z = 11 + 77k - 8 - 52k$$

$$\Rightarrow 2z = 3 + 25k$$

$$\Rightarrow 3 + 25k \equiv 0 [2] \Rightarrow k \equiv 1 [2]$$

$$\Rightarrow k = 1 + 2p \Rightarrow z = 3 + 25(1 + 2p)$$

$$\Rightarrow 2z = 28 + 50p \Rightarrow \boxed{z = 14 + 25p}$$

$$\text{d'où } x = 2 + 13(1 + 2p) = 15 + 26p$$

$$\text{d'où } y = 1 + 7(1 + 2p) = 8 + 14p$$

Concl: L'ensemble des points $M(x, y, z)$

de $D = P_1 \cap P_2$ a' coordonnées entières

ant: $\{(15+26p, 8+14p, 14+25p) / p \in \mathbb{Z}\}$

Exercice N° 05

Principale 2018

(A) $q \in \mathbb{N}$

1) q^2 impair $\Leftrightarrow q^2 \equiv 1[2] \Leftrightarrow$
 $q^2 - 1 \equiv 0[2] \Leftrightarrow (q-1)(q+1) \equiv 0[2]$
 or 2: premier $\Rightarrow 2 \mid q-1$ ou $2 \mid q+1$
 $\Rightarrow \begin{cases} q-1 \equiv 0[2] \\ \text{ou} \\ q+1 \equiv 0[2] \end{cases} \Rightarrow q \equiv 1[2]$
 alors q : impair

Réciproque: q : impair $\Leftrightarrow q \equiv 1[2]$

alors $q^2 \equiv 1[2]$ d'où q^2 : impair

Concl: q^2 impair $\Leftrightarrow q$: impair

2) q : impair $\Rightarrow$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel

que $q = 1 + 2k$

$\Rightarrow q^2 = (1+2k)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$= 4k(k+1) + 1$

or $k(k+1) = 2p$: produit de 2 entiers consécutifs

$\Rightarrow q^2 = 8p + 1$ alors $q^2 \equiv 1[8]$

(B) $A = \{(m, n, q) \in (\mathbb{N}^*)^3 / 2^{2m} + 3^{2n} = q^2\}$

1) on a $(2, 1, 5) \in (\mathbb{N}^*)^3$

et $2^4 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2$ vérifié

$\Rightarrow (2, 1, 5)$ est un élément de A

2) a) $2 \equiv 0[2] \Rightarrow 2^{2m} \equiv 0[2]$

$3 \equiv 1[2] \Rightarrow 3^{2n} \equiv 1[2]$

$\Rightarrow 2: q^2 \equiv 1[2]$

alors q^2 : impair $\Leftrightarrow q$: impair

b) q : imp $\Rightarrow q^2 \equiv 1[8]$ (1)
 et $3^{2n} = 9^n$ or $9 \equiv 1[8] \Rightarrow 3^{2n} \equiv 1[8]$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow q^2 - 3^{2n} \equiv 0[8]$

c) $q^2 - 3^{2n} = 2^{2m} \equiv 0[8]$

or $m=1 \Rightarrow 2^{2m} = 4 \not\equiv 0[8] \Rightarrow m \neq 1$

concl: $m \geq 2$

(3) a) $q \equiv 1[2]$ $\Rightarrow \begin{cases} q - 3^n \equiv 0[2] \\ 3^n \equiv 1[2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q - 3^n \equiv 0[2] \\ q + 3^n \equiv 0[2] \end{cases}$

concl: $(q-3^n)$ et $(q+3^n)$: sont pairs

b) $d = (q-3^n) \wedge (q+3^n)$

ona alors $d \mid q-3^n$ et $d \mid q+3^n$

$\Rightarrow d \mid (q-3^n) + (q+3^n) \Rightarrow d \mid 2q$

et $d \mid (q-3^n) \cdot (q+3^n) \Rightarrow d \mid q^2 - 3^{2n} \Rightarrow d \mid 2^{2m}$

$\cdot d \mid 2q$ $\Rightarrow d \mid (2q) \wedge (2^{2m})$

$\Rightarrow d \mid 2(q \wedge 2^{2m-1}) \Rightarrow \begin{cases} q \wedge 2^{2m-1} = 1 \\ d \mid 2 \end{cases}$ (1)

d'autre part: $\begin{cases} 2 \mid q-3^n \\ 2 \mid q+3^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \mid d \\ d \mid 2 \end{cases}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow d = 2$

c) $d = 2 \Rightarrow$ il existe 2 entiers et

tel que $\begin{cases} q-3^n = 2x \\ q+3^n = 2y \\ x \wedge y = 1 \\ x < y \end{cases}$

Or on a $(q-3^n)(q+3^n) = q^2 - 3^{2n} = 2^{2m}$
 $\Rightarrow (2x)(2y) = 2^{2m} \Rightarrow \begin{cases} xy = 2^{2m-2} \\ x \wedge y = 1 \\ x < y \end{cases}$

$\Rightarrow x = 1$ et $y = 2^{2m-2}$

$\Rightarrow \begin{cases} q-3^n = 2 & (1) \\ q+3^n = 2(2^{2m-2}) = 2^{2m-1} & (2) \end{cases}$

(1) + (2) $\Rightarrow 2q = 2 + 2^{2m-1} \Rightarrow q = 1 + 2^{2m-2}$

(2) - (1) $\Rightarrow 2(3^n) = 2^{2m-1} - 2 \Rightarrow 3^n = 2^{2m-2} - 1$

4) Si $m=2 \Rightarrow q = 1+2^2 = 5$
 et $3^n = 2^2 - 1 = 3 \Rightarrow n=1$

5) $m \geq 3$

a) on sait que $3^n = 2^{2m-2} - 1$

or $m \geq 3 \Rightarrow 2^{2m-2} = 2^4 \cdot 2^{2m-6} = 16 \cdot 2^{2m-6}$

$\Rightarrow 2^{2m-2} \equiv 0 \pmod{16} \Rightarrow 3^n \equiv -1 \pmod{16}$

b) $3^0 = 1 \equiv 1 \pmod{16}$

$3^1 = 3 \equiv 3 \pmod{16}$

$3^2 = 9 \equiv 9 \pmod{16}$

$3^3 = 27 \equiv 11 \pmod{16}$

$3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{16}$

$\Rightarrow 3^k \equiv \begin{cases} 1 \pmod{16} & \text{si } k=4p \\ 3 \pmod{16} & \text{si } k=4p+1 \\ 9 \pmod{16} & \text{si } k=4p+2 \\ 11 \pmod{16} & \text{si } k=4p+3 \end{cases}$

c) Si $m \geq 3$, on a $3^n \equiv -1 \pmod{16}$

$\Rightarrow 3^n \equiv 15 \pmod{16}$

or $\forall n \in \mathbb{N}$, 3^n n'est jamais congru à 15 (16)

d'où si $m \geq 3$, il n'existe pas de triplets (m, n, q) élément de A.

6) l'unique triplet élément de A est $(2, 1, 5)$

Exercice N° 06 :

Principale 2017

1) $x \wedge 53 = 1$

a) 53 premier
 et 53 ne divise pas x $\Rightarrow$ d'après

le thm de Fermat: $x^{52} \equiv 1 \pmod{53}$
 $\Rightarrow$ le reste est $\boxed{1}$

b) $x^{52} \equiv 1 \pmod{53}$

pm $k \in \mathbb{N} \Rightarrow x^{52k} \equiv 1 \pmod{53}$

d'où $x(x^{52k}) \equiv x \pmod{53}$

$\Rightarrow \boxed{x^{52k+1} \equiv x \pmod{53}}$

2) $(E_1): x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$

pm $x = 2^9 \Rightarrow (2^9)^{29} = 2^{261}$

or $261 = 5(29) + 1$

$\Rightarrow (2^9)^{29} = 2^{(52)5+1} = 2[53]$

Car $2 \wedge 53 = 1$ (d'après 1) b))

alors $(2^9)^{29} \equiv 2 \pmod{53} \Rightarrow 2^9$ solution

3) x : solution de (E_1)

a) Or $x \wedge 53 = 1$?

on pose $d = x \wedge 53$

$\Rightarrow d \mid x \Rightarrow d \mid x^{29} - 53k$
 et $d \mid 53$

$\Rightarrow d \mid 2$ alors $\begin{cases} d=2 \\ \text{ou} \\ d=1 \end{cases}$

or 2 ne divise pas 53 $\Rightarrow d=1$

Concl: $\boxed{x \wedge 53 = 1}$

b) $x^{261} = x^{5(52)+1}$ or $x \wedge 53 = 1$

$\Rightarrow$ d'après 1) b) $x^{261} \equiv x \pmod{53}$

c) on a x : solution de $(E_1) \Rightarrow x = 2 \pmod{53}$

alors $(x^{29})^9 \equiv 2^9 \pmod{53} \Rightarrow x^{261} \equiv 2^9 \pmod{53}$

or $x^{261} \equiv x \pmod{53} \Rightarrow \boxed{x \equiv 2^9 \pmod{53}}$

4) a) $2^9 = 512 = 9(53) + 35 \Rightarrow \boxed{2^9 \equiv 35 \pmod{53}}$

b) on a: x : solution de $(E_1) \Rightarrow$

$x \equiv 2^9 \pmod{53}$ et $2^9 \equiv 35 \pmod{53}$

alors $x \equiv 35 \pmod{53} \Rightarrow x = 35 + 53k$

$\boxed{\mathbb{Z} = \{35 + 53k \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

5) $(E_2): 71u - 53v = 1$

a) pm $u=3$
 $v=4 \Rightarrow 71(3) - 53(4) = 1$

vérifié
 $\Rightarrow (3, 4)$ solution de (E_2)

b) $(E_2): 71u - 53v = 71(3) - 53(4)$

$\Rightarrow 71(u-3) = 53(v-4)$

or $71 \wedge 53 = 1 \Rightarrow$ d'après Gauss.

$$53 \mid u-3 \Leftrightarrow u-3 = 53k$$

$$\text{d'où } u = 3 + 53k$$

de même $71 \mid v-4 \Leftrightarrow v-4 = 71k$

$$\text{d'où } v = 4 + 71k$$

Relaisnons :

$$71(3+53k) - 53(4+71k) =$$

$$213 + 3763k - 212 - 3763k = 1$$

vérifier $\Rightarrow$

$$S_{\mathbb{Z}} = \{ (3+53k; 4+71k) / k \in \mathbb{Z} \}$$

$$6) S: \begin{cases} x \equiv 34 [71] \\ x^{29} \equiv 2 [53] \Rightarrow x \equiv 35 [53] \end{cases}$$

$$\Rightarrow S \begin{cases} x \equiv 34 [71] \Rightarrow x = 34 + 71u \\ x \equiv 35 [53] \Rightarrow x = 35 + 53v \end{cases}$$

$$\text{d'où } 34 + 71u = 35 + 53v$$

$$\Leftrightarrow 71u - 53v = 1$$

$\Rightarrow (u, v)$ solution de $(\equiv 2)$

$$\text{d'où } u = 3 + 53k$$

$$\text{alors } x = 34 + 71(3+53k)$$

$$\Rightarrow x = 247 + 3763k$$

$$S_{\mathbb{Z}} = \{ 247 + 3763k / k \in \mathbb{Z} \}$$

$$2) b = (9217)^4 \Rightarrow 9217 \equiv 2 [5]$$

$$\Rightarrow 9217^4 \equiv 2^4 [5] \Leftrightarrow \boxed{b \equiv 1 [5]}$$

$$\text{et } 9217 \equiv 1 [16] \Rightarrow 9217^4 \equiv 1 [16]$$

$$\Rightarrow \boxed{b \equiv 1 [2^4]}$$

$$3) a) b_n = b^{5^n} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow b_{n+1} = b^{5^{n+1}} - 1 = b^{5^n \times 5} - 1$$

$$= (b^{5^n})^5 - 1 \quad \text{or } b^{5^n} = b_n + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{b_{n+1} = (b_n + 1)^5 - 1}$$

b) D'après la formule du binôme de Newton

$$(b_n + 1)^5 = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{b_{n+1} = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n + 1}$$

$$4) a) \text{ Or } 5^{n+1} \mid b_n \Rightarrow 5^{n+2} \mid b_{n+1}$$

$$\text{Comme } 5^{n+1} \mid b_n \Rightarrow 5^{n+2} \mid b_{n+1}$$

$$\Rightarrow 5^{n+2} \mid b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n + 1$$

$$\Leftrightarrow 5^{n+2} \mid b_n^5 + 5b_n [b_n^3 + 2b_n^2 + 2b_n + 1]$$

$$\text{or } 5^{n+1} \mid b_n \Rightarrow 5^{n+2} \mid 5b_n$$

$$\Rightarrow 5^{n+2} \mid 5b_n (b_n^3 + 2b_n^2 + 2b_n + 1)$$

$$\text{alors } \boxed{5^{n+2} \mid b_n^5}$$

$$b) \text{ Ma } \forall n \in \mathbb{N}, b_n \equiv 0 (5^{n+1})$$

$$\text{• pm } n=0: b_0 = b^{5^0} - 1 = b^1 - 1 \equiv 0 [5]$$

$$\text{car } b \equiv 1 [5] \Rightarrow \text{vérifier}$$

$$\text{• Supp } b_n \equiv 0 [5^{n+1}] \text{ vrai}$$

$$\text{• Dq } b_{n+1} \equiv 0 [5^{n+2}]$$

Exercice N° 07 :

Principale 2016

$$1) a \equiv 1 [2^4] \text{ et } a \equiv 1 [5^4]$$

$$\text{Comme } 2 \wedge 5 = 1 \Rightarrow 2^4 \wedge 5^4 = 1$$

alors d'après la conséquence de

$$\text{Gauss : } a \equiv 1 [2^4 \times 5^4]$$

$$\Rightarrow \boxed{a \equiv 1 [10^4]}$$

Exercice N° 08 : Contrôle 2016

en efft : $s \cdot 5^{n+1} \mid b_n$

$$\Rightarrow 5^{n+2} \mid b_n \quad (1)$$

et $5^{n+1} \mid b_n \Rightarrow 5^{n+2} \mid 5b_n$

d'où $5^{n+2} \mid 5b_n(b_n^3 + 2b_n^2 + 7b_n + 1) \quad (2)$

① et ② $\rightarrow 5^{n+2} \mid b_n^5 + 5b_n(b_n^3 + 2b_n^2 + 7b_n + 1)$

$$\Rightarrow 5^{n+2} \mid b_{n+1}$$

on a : $\forall n \in \mathbb{N}; \quad b_n \equiv 0 [5^{n+1}]$

5) a) $(9217)^{500} = (9217)^{125 \times 4}$
 $= (9217)^{5^3 \times 4} = \left[(9217)^4 \right]^{5^3} = b$

or $b \equiv 1 [5] \Rightarrow b_3 \equiv b^3 - 1 \equiv 0 [5^4]$

d'où $b \equiv 1 [5^4] \Rightarrow (9217)^{500} \equiv 1 [625]$

b) d'autre part : $b \equiv 1 [2^4]$

$\Rightarrow b^{125} \equiv 1 [16] \Rightarrow (9217)^{500} \equiv 1 [16]$

ainsi on a :

$(9217)^{500} \equiv 1 [625]$
 $(9217)^{500} \equiv 1 [16]$ $\Rightarrow$ d'après 1°)

on obtient $(9217)^{500} \equiv 1 [625 \times 16]$

$\Rightarrow (9217)^{500} \equiv 1 [10000]$

c) comme $(9217)^{500} \equiv 1 [10000]$

$\Rightarrow (9217)^{501} \equiv 9217 [10000]$

$\Rightarrow \left[(9217)^{167} \right]^3 \equiv 9217 [10000]$

$\Rightarrow$ l'entier $(9217)^{167}$ son cube est congru à 9217 modulo 10000

1) $a \in \mathbb{N}^*$ et $a \wedge 5 = 1$

Le tableau des restes modulo 5 :

a	0	1	2	3	4
a^2	X	1	4	4	1
a^4	X	1	1	1	1

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{N}$ tel que $a \wedge 5 = 1$

on a $a^4 \equiv 1 [5]$

2) $p \leq q$ et $q \equiv p [4]$

$\Rightarrow q = p + 4k \quad / k \in \mathbb{N}$

a) $a^q = a^{p+4k} = a^p \cdot (a^4)^k$

or $a^4 \equiv 1 [5] \Rightarrow a^{4k} \equiv 1 [5]$

d'où $a^p \cdot a^{4k} \equiv a^p [5]$

$\Rightarrow a^q \equiv a^p [5]$

b) si $a \equiv 0 [2] \Rightarrow a^q \equiv a^p [2]$

or $a \equiv 0 [2] \Rightarrow a^p \equiv 0 [2]$

$\cdot$ si $a \equiv 1 [2] \Rightarrow a^p \equiv 1 [2]$

$\Rightarrow a^q \equiv a^p [2] \quad (1)$

$\cdot$ si $a \equiv 1 [2] \Rightarrow a^q \equiv 1 [2]$

$a^p \equiv a^q [2] \quad (2)$

① et ② $\rightarrow \forall a \in \mathbb{N}^*, \quad a^q \equiv a^p [2]$

c) on a $a^q \equiv a^p [5] \Rightarrow a^q - a^p \equiv 0 [5]$

et $a^q \equiv a^p [2] \Rightarrow a^q - a^p \equiv 0 [2]$

et comme $5 \wedge 2 = 1 \Rightarrow$ d'après

la conséquence de Gauss on obtient $a^q - a^p \equiv 0 [5 \times 2]$

$\Rightarrow a^q \equiv a^p [10]$

Exercice N° 09 : Principal 2015

$$3) (E): 25x - 21y = 4$$

a) on a $25(1) - 21(1) = 4$
 vérifié $\Rightarrow (1,1)$ solution de (E)

b) (E): $25x - 21y = 25(1) - 21(1)$
 $\Leftrightarrow 25(x-1) = 21(y-1)$

$25 \wedge 21 = 1 \Rightarrow$ d'après Gauss,

on a: $\begin{cases} x-1 = 21k \\ y-1 = 25k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+21k \\ y = 1+25k \end{cases}$

Réciproquement:

$25(1+21k) - 21(1+25k)$
 $= 25 + 525k - 21 - 525k = 4$
 $\Rightarrow S_{\mathbb{Z}} = \{(1+21k; 1+25k) / k \in \mathbb{Z}\}$

c) Dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on prend juste les solutions positives $\Rightarrow$

$S_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} = \{(1+21k, 1+25k) / k \in \mathbb{N}\}$

$A = \{(1+21k, 1+25k) / k \in \mathbb{N}\}$

d) $(\alpha, \beta) \in A$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } n \wedge 5 = 1$

on a $n^\alpha = n^\beta \pmod{10}$

$(\alpha, \beta) \in A \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1+21k \\ \beta = 1+25k \end{cases}$

et $25\alpha - 21\beta = 4$

$\Rightarrow 25\alpha = 4 + 21\beta = 4 + \beta + 20\beta$

$\Rightarrow 25\alpha = \beta + 4(1+5\beta)$

$\Rightarrow 25\alpha \equiv \beta \pmod{4}$ or $25 \equiv 1 \pmod{4}$

$\Rightarrow \alpha \equiv \beta \pmod{4} \Rightarrow n^\alpha \equiv n^\beta \pmod{10}$
 $n \in \mathbb{N}^* / n \wedge 5 = 1$

d'où n^α et n^β ont le même chiffre d'unité.

1) (E): $47x + 53y = 1$

a) $47(-9) + 53(8) = -423 + 424 = 1$
 $\Rightarrow (-9, 8)$: solution particulière de (E)

b) (E): $47x + 53y = 47(-9) + 53(8)$

$\Leftrightarrow 47(x+9) = 53(8-y)$

Comme $47 \wedge 53 = 1 \Rightarrow$

d'après Gauss on obtient:

$\begin{cases} x+9 = 53k \\ 8-y = 47k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9+53k \\ y = 8-47k \end{cases}$

Réciproquement:

$47(-9+53k) + 53(8-47k) =$
 $-423 + 47(53k) + 424 - 53(47k) = 1$

Concl: $S_{\mathbb{Z}} = \{(-9+53k; 8-47k) / k \in \mathbb{Z}\}$

c) on a (E): $47x + 53y = 1$

$\Rightarrow 47x = 1 - 53y \Rightarrow 47x \equiv 1 \pmod{53}$

alors x est un inverse de 47 modulo 53

on a $x = -9+53k$ d'après b)

$\Rightarrow$ L'ensemble des inverses de 47 modulo 53 s'écrit sous forme de $x = -9+53k$

d) pour $k=1 \Rightarrow x = -9+53 = 44$
 $\Rightarrow 44$ est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53

Concl: $\boxed{(43) \cdot (47) \equiv 1 \pmod{53}}$

2) a) on a 53 premier

et 53 ne divise pas 45 $\Rightarrow$

d'après le théo de Fermat:

$\boxed{45^{52} \equiv 1 \pmod{53}}$

b) $45^{106} = 45^{104+2} = (45^{52})^2 \times 45^2$

$$\text{or } 45^{52} \equiv 1[53] \Rightarrow 45^{106} \equiv 1[53]$$

$$\text{et } 45^2 = 2025 \Rightarrow 45^2 \equiv 11[53]$$

$$\text{donc } 45^{106} \equiv 11[53]$$

ainsi le reste de 45^{106} modulo 53

est $\boxed{11}$

$$3) N = 1 + 45 + 45^2 + \dots + 45^{105} = \sum_{k=0}^{105} 45^k$$

$$a) N = \sum_{k=0}^{105} 45^k = \frac{1-45^{106}}{1-45}$$

$$\Rightarrow N = \frac{45^{106} - 1}{44} \text{ donc } 44N = 45^{106} - 1$$

$$\text{or } 45^{106} \equiv 11[53] \Rightarrow 44N \equiv 10[53]$$

$$\text{Cml : } \boxed{44N \equiv 10[53]}$$

b) on sait que 44 est l'inverse de 47 modulo 53

$$\Rightarrow 44 \times 47 \equiv 1[53]$$

$$\text{or } 44N \equiv 10[53]$$

$$\Rightarrow 47 \times 44N \equiv 470[53]$$

$$\Rightarrow N \equiv 470[53]$$

$$\text{or } 470 \equiv 46[53]$$

$$N \equiv 46[53] \Rightarrow \text{le reste est } \boxed{46}$$

Exercice N° 10 : Principal 2014

$$1) a \in \mathbb{Z} / a \equiv 1[10]$$

$$a) \text{ on a } a \equiv 1[10] \Rightarrow a^k \equiv 1[10]$$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^9 a^k \equiv \sum_{k=0}^9 1[10]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^9 a^k \equiv 10[10] \Rightarrow \sum_{k=0}^9 a^k \equiv 0[10]$$

$$\text{Cml : } \boxed{a^9 + a^8 + \dots + a + 1 \equiv 0[10]}$$

$$b) \text{ on a } a^{10} - 1 = (a-1)(a^9 + a^8 + \dots + a + 1)$$

$$\text{or } a \equiv 1[10] \Rightarrow a-1 \equiv 0[10] \quad (1)$$

$$\text{or } a^9 + a^8 + \dots + a + 1 \equiv 0[10]$$

$$\Rightarrow a^9 + a^8 + \dots + a + 1 \equiv 0[10] \quad (2)$$

$$(1) \cdot (2) \Rightarrow (a-1)(a^9 + a^8 + \dots + a + 1) \equiv (10k)(10l)$$

$$\Rightarrow a^{10} - 1 \equiv 0[100] \Rightarrow \boxed{a^{10} \equiv 1[100]}$$

2) a) Le Tableau des restes modulo 10 de b^k :

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

d'où les restes possibles de b^4 modulo 10 sont $\{0, 1, 5, 6\}$

$$b) \text{ on a } b \text{ impair et } b \neq 5[10] \Rightarrow b \wedge 10 = 1$$

$$\text{d'où } b^4 \equiv 1[10]$$

Reciprocité :

$$b^4 \equiv 1[10] \Rightarrow b^4 - 1 \equiv 0[10]$$

$$\Rightarrow (b^2 - 1)(b^2 + 1) \equiv 0[10]$$

$$\text{alors } \begin{cases} b^2 - 1 \equiv 0[10] \\ b^2 + 1 \equiv 0[10] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b-1)(b+1) \equiv 0[10] \\ b^2 \equiv -1[10] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-1 \equiv 0[10] \text{ ou } b+1 \equiv 0[10] \\ b^2 \equiv 9[10] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \equiv 1[10] \text{ ou } b \equiv 9[10] \\ (b-3)(b+3) \equiv 0[10] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b \equiv 1[10] \text{ ou } b \equiv 9[10] \\ b \equiv 3[10] \text{ ou } b \equiv 7[10] \end{cases}$$

$$\Rightarrow b \text{ impair et } \neq 5 \Rightarrow b \wedge 10 = 1$$

$$\Rightarrow b \text{ impair et } \neq 5 \Rightarrow b \wedge 10 = 1$$

$$\text{Cml : } \boxed{b^4 \equiv 1[10] \Rightarrow b \wedge 10 = 1}$$

$$3) b \wedge 10 = 1 \Rightarrow b^4 \equiv 1[10]$$

$$a) \text{ on a } b^4 \equiv 1[10] \Rightarrow (b^4)^{10} \equiv 1[100]$$

d'après 1) a)

$$\text{donc } \boxed{b^{40} \equiv 1[100]}$$

$$b) 67^{42}$$

$$\text{car } 67 \wedge 10 = 1$$

$$\Rightarrow \text{impair } b = 67 \Rightarrow b^{40} \equiv 1[100]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 67^{40} \equiv 1[100] \\ 67^2 \equiv 89[100] \end{cases} \Rightarrow 67^{42} \equiv 89[100]$$

alors les 2 derniers chiffres de 67^{42}

sont $\boxed{89}$

Exercice N° 11 : Contrôle 2014

$$1) 1111x = 10^4 y = 1$$

$$a) 1111(-9) - 10^4(-1) = -9999 + 10000 = 1$$

$$\Rightarrow (-9, -1) : \text{solution particulière de (E)}$$

$$b) (E) : 1111x - 10^4 y = 1111(-9) - 10^4(-1)$$

$$\Leftrightarrow 1111(x+9) = 10^4(y+1)$$

$$1111 \wedge 10^4 = 1 \Rightarrow \text{d'après Gauss on a :}$$

$$\begin{cases} x+9 = 10^4 k \\ y+1 = 1111 k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 + 10^4 k \\ y = -1 + 1111 k \end{cases}$$

Réciproquement :

$$1111(-9 + 10^4 k) - 10^4(-1 + 1111 k) = 1 \text{ vérifié}$$

$$\Rightarrow S_{\mathbb{Z}^2} = \{(-9 + 10^4 k, -1 + 1111 k) / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$2) a) n = 1111p \text{ et } n = 1 + 9 \cdot 10^4$$

$$\text{alors } 1111p = 1 + 9 \cdot 10^4$$

$$\Leftrightarrow 1111p - 9 \cdot 10^4 q = 1 \Rightarrow (p, q) \text{ sol de (E)}$$

$$b) \begin{cases} n \equiv 0 [1111] \\ n \equiv 1 [10^4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1111p \\ n = 1 + 10^4 q \end{cases}$$

$$\text{comme } (p, q) \text{ sol de (E)} \Rightarrow p = x = -9 + 10^4 k$$

$$\Rightarrow n = 1111(-9 + 10^4 k)$$

$$\Leftrightarrow n = -9999 + 11110000 k / k \in \mathbb{Z}$$

$$c) \text{ pour } k=1 \Rightarrow n = 11110000 - 9999$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 11110000 - 9999}$$

Exercice N° 12 : Principal 2013

$$1). 33n \equiv 0 [2013] \Leftrightarrow 33n = 2013k$$

$$\Rightarrow n = \frac{2013}{33} k \Leftrightarrow n = 61k$$

$$\Leftrightarrow n \equiv 0 [61] \Rightarrow \boxed{\text{Vrai}}$$

$$2) 33x + 11y = 2013 \text{ (E)}$$

$$\text{on a } 33 \wedge 11 = 11 \text{ divise } 2013$$

$$\Rightarrow \text{d'après Bézout (E) admet des solutions dans } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{\text{Vrai}}$$

Exercice N° 13 : Contrôle 2013

$$(E) : 2x + 5y = 6$$

$$1) a) 2(3) + 5(0) = 6 \text{ vérifié}$$

$$\Rightarrow (3, 0) \text{ solution particulière de (E)}$$

$$b) (E) : 2x + 5y = 2(3) + 5(0)$$

$$\Leftrightarrow 2(x-3) = 5(-y) \text{ or } 2 \wedge 5 = 1$$

$$\Rightarrow \text{d'après Gauss : } \begin{cases} x-3 = 5k \\ -y = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 5k \\ y = -2k \end{cases}$$

$$\text{Réciproquement : } 2(3+5k) + 5(-2k) = 6 \text{ vérifié}$$

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(3+5k, -2k) / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$2) (x, y) \text{ solution de (E)}$$

$$a) \text{ on pose } d = \text{pgcd}(2, 5)$$

$$\Rightarrow d \mid x \Rightarrow d \mid 2x + 5y \Leftrightarrow d \mid 6$$

$$\text{or comme } d > 0 \Rightarrow \boxed{d \in \{1, 2, 3, 6\}}$$

$$b) (x, y) \text{ solution de (E) et } d = 3$$

$$\Rightarrow 3 \mid x \Rightarrow 3 + 5k \equiv 0 [3]$$

$$\Leftrightarrow 5k \equiv 0 [3] \Leftrightarrow k \equiv 0 [3]$$

$$\Rightarrow k = 3p \Rightarrow x = 3 + 15p$$

$$\text{or il faut que } 2 \text{ ne divise pas } x$$

$$\Leftrightarrow 3 + 15p \not\equiv 0 [2] \Leftrightarrow 1 + p \not\equiv 0 [2]$$

$$\Leftrightarrow p \not\equiv 1 [2] \Rightarrow p : \text{pair} \Rightarrow p = 2p'$$

$$\Rightarrow k = 6p' \text{ et } \begin{cases} x = 3 + 30p' \\ y = -12p' \end{cases}$$

$$\text{concl : } S_{\mathbb{Z}^2} = \{(3 + 30k, -12k) / k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice N° 14 : Contrôle 2012

$$1) (E) : 7x + 18y = 9$$

$$a) 7(9) + 18(-3) = 63 - 54 = 9 \text{ vérifié}$$

$$\Rightarrow (9, -3) \text{ est une solution particulière de l'équation (E)}$$

$$b) (E) \Leftrightarrow 7x + 18y = 7(9) + 18(-3)$$

$$\Leftrightarrow 7(x-9) = 18(-y+3)$$

$$\text{on } 7 \wedge 18 = 1 \Rightarrow \text{d'après Gauss} \begin{cases} x - 9 = 18k \\ -y - 3 = 7k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 9 + 18k \\ y = -3 - 7k \end{cases}$$

Relativement: $7(9+18k) + 18(-3-7k) = 9$ Vrai

enl: $S_{\mathbb{Z}} = \{(9+18k, -3-7k) / k \in \mathbb{Z}\}$

2) (S): $\begin{cases} n \equiv 6 [7] \\ n \equiv 15 [18] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 6 + 7a \\ n = 15 + 18b \end{cases}$

$\Rightarrow 6 + 7a = 15 + 18b \Rightarrow 7a - 18b = 9$

$\Rightarrow 7a + 18(-b) = 9 \Rightarrow (a, -b): \text{sol de } (E)$

d'où $\begin{cases} a = 9 + 18k \\ b = 3 + 7k \end{cases}$ ou $n = 6 + 7a$

$\Rightarrow n = 6 + (9+18k) \cdot 7 = 69 + 126k$

vérif: $69 + 126k = 3 \times 18 + 15 + 7 \times 18 \Rightarrow n \equiv 15 [18]$

$69 + 126k = 9 \times 7 + 6 + 7 \times 18 \Rightarrow n \equiv 6 [7]$

enl: $S_{\mathbb{Z}} = \{69 + 126k / k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice N° 16: Principal 2010

① Le quotient de (-23) par (-5) est 4

Faux Car $b < 0 \wedge q = \left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 9 - 5$

② $64a + 9b = 1 \Rightarrow b \wedge 64 = 1$ **Vrai**

Car d'après Bezout $64 \wedge 9 = 1$, $64 \wedge b = 1$

$9 \wedge a = 1$ et $a \wedge b = 1$

③ $147^{144} \equiv 2 [12]$ **F**

Car $147 \text{ imp} \Rightarrow 147^{144} \text{ imp}$
 $\wedge 2 [12] \text{ pair} \Rightarrow \text{pair} \neq \text{impair}$

④ $x^2 \equiv 0 [8] \Leftrightarrow x \equiv 0 [8]$ **Faux**

contre-exemple: $4^2 \equiv 0 [8]$ mais $4 \not\equiv 0 [8]$

⑤ Si $\begin{cases} x \equiv 3 [4] \\ x \equiv 4 [5] \end{cases} \Rightarrow x \equiv 19 [20]$ **Vrai**

Car $\begin{cases} x \equiv 3 [4] \Rightarrow (x+1) \equiv 0 [4] \\ x \equiv 4 [5] \Rightarrow (x+1) \equiv 0 [5] \end{cases} \Rightarrow (x+1) \equiv 0 [20]$
 $4 \wedge 5 = 1 \Rightarrow x \equiv 19 [20]$

d'où $x \equiv -1 [20] \Rightarrow x \equiv 19 [20]$

⑥ p: premier $\neq 2 \Rightarrow p^2 \equiv 1 [4]$ **Vrai**

Car $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ ou $\begin{cases} p+1 = 2k \\ p-1 = 2k' \end{cases}$
 $\Rightarrow (p+1)(p-1) = 4k'k \equiv 0 [4] \Rightarrow p^2 \equiv 1 [4]$

Exercice N° 17: Contrôle 2010

$$a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$$

1) $\begin{cases} 7^0 \equiv 1 [100] \\ 7^1 \equiv 7 [100] \\ 7^2 \equiv 49 [100] \\ 7^3 \equiv 43 [100] \\ 7^4 \equiv 1 [100] \end{cases} \Rightarrow 7^n \equiv \begin{cases} 1 [100] \rightarrow \text{Si } n = 4p \\ 7 [100] \rightarrow \text{Si } n = 4p+1 \\ 49 [100] \rightarrow \text{Si } n = 4p+2 \\ 43 [100] \rightarrow \text{Si } n = 4p+3 \end{cases}$

2) $\exists k \in \mathbb{N} / a = 100k - 1$

on a $2009 \equiv 1 [4] \Rightarrow 7^{2009} \equiv 7 [100]$

$\wedge 2010 \equiv 2 [4] \Rightarrow 7^{2010} \equiv 49 [100]$

$\wedge 2011 \equiv 3 [4] \Rightarrow 7^{2011} \equiv 43 [100]$

d'où $7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011} \equiv 99 [100]$

$\Rightarrow a \equiv 99 [100] \Leftrightarrow a \equiv -1 [100]$

Exercice N° 15: Principal 2011

① $x^3 \equiv x [2]$ **Vrai**

Car $x^3 - x = x(x^2 - 1) = (x-1)x(x+1)$

ou $x(x+1)$: produit de 2 entiers consécutifs

$\Rightarrow x(x+1) \equiv 0 [2] \Rightarrow x^3 - x \equiv 0 [2]$

② Si $x \equiv 2 [14] \Rightarrow x \equiv 1 [7]$ **Faux**

Contre-exemple: $16 \equiv 2 [14]$ mais $16 \not\equiv 1 [7]$

③ Si $4x \equiv 10y [5] \Rightarrow x \equiv 0 [5]$ **Vrai**

Car $10y \equiv 0 [5] \Rightarrow 4x \equiv 0 [5]$

$4 \wedge 5 = 1 \Rightarrow$ d'après Gauss $x \equiv 0 [5]$

④ Si $\begin{cases} x \equiv 4 [5] \\ y \equiv 5 [8] \end{cases} \Rightarrow 8x - 5y = 7$ **Faux**

$x \equiv 4 [5] \Rightarrow x = 4 + 5k \Rightarrow 8x = 32 + 40k$

$\Rightarrow 8x \equiv 32 [40] \Leftrightarrow (8x - 32) \equiv 0 [40]$ ①

$y \equiv 5 [8] \Rightarrow 5y = 25 + 40k' \Rightarrow 5y \equiv 25 [40]$

$\Leftrightarrow 5y \equiv 25 [40] \Leftrightarrow (5y - 25) \equiv 0 [40]$ ②

① $\wedge$ ② $\rightarrow (8x - 32) \equiv (5y - 25) [40]$

$\Rightarrow 8x - 5y - 7 \equiv 0 [40]$

$\Rightarrow 8x - 5y \equiv 7 [40]$

$\Rightarrow$ il existe $k \in \mathbb{N}^*$ car $a > 0$

tel p. $a = -1 + 100k$

3) a) on a $a^{100} \equiv 1 \pmod{100^2}$

on a: $a^{100} = (100k - 1)^{100} \Leftrightarrow$

$$a^{100} = (100k)^{100} - (100k)^{99} C_{100}^1 + (100k)^{98} C_{100}^2 - (100k)^{97} C_{100}^3 + \dots + C_{100}^{99} (100k) - C_{100}^{100} (100k)^0$$

$$\Rightarrow a^{100} = \sum_{p=0}^{99} (-1)^p (100k)^{100-p}$$

$$\text{d'où } a^{100} = \sum_{p=0}^{99} (-1)^p (100k)^p (100k)^{99-p} = C_{99}^{99} 100^{99} k^{99} + \dots$$

$$\Rightarrow a^{100} = 100^2 k^2 \left[\sum_{p=0}^{98} (-1)^p (100k)^{98-p} \right] - 100^2 k + 1$$

$$\Rightarrow a^{100} = 100^2 \left[k^2 \sum_{p=0}^{98} (-1)^p (100k)^{98-p} - k \right] + 1$$

$$\Rightarrow a^{100} = (100^2) \cdot k + 1 \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{100}$$

b) $a^{100} \equiv 1 \pmod{100^2} \Leftrightarrow a^{100} = 1 + 10000k$

$\Rightarrow$ les 4 derniers chiffres de a^{100}

sont: $\boxed{0001}$

Exercice N° 18 : Principale 2009

1) a) pour $x=0$ et $y=-2 \Rightarrow 3x+4y = -8$ vérifie
 $\Rightarrow (0, -2)$ solution particulière de (E)

b) (E) $3x + 4y = 3(0) + 4(-2)$

$$\Leftrightarrow 3x = 4(-y-2)$$

on $3 \nmid 4 = 1 \Rightarrow$ d'après Gauss $\begin{cases} x = 4k \\ -y-2 = 3k \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4k \\ y = -2-3k \end{cases}$$

Réciproquement: $3(4k) + 4(-2-3k) = -8$ vérifie

$$\Rightarrow S_{\mathbb{Z}^2} = \{ (4k, -2-3k) / k \in \mathbb{Z} \}$$

2) $\Delta: 3x + 4y + 8 = 0$

$A \in \Delta / x_A = 0 \Rightarrow y_A = -2$

d'où $A(0, -2)$

a) on a $M \in \Delta$ à coordonnées entières

$$\Rightarrow AM = 5k$$

$$\vec{AM} \begin{pmatrix} x-0 \\ y+2 \end{pmatrix} \text{ et } AM = \sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2}$$

a) $M \in \Delta \Leftrightarrow 3x + 4y + 8 = 0$
 $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall (x, y) \in \{ (4k, -2-3k) \}$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{(4k)^2 + (-3k)^2} = \sqrt{25k^2} = 5k$$

d'où $AM = 5k / k \in \mathbb{N}$

Concl: $M \in \Delta$ à coordonnées entières $\Rightarrow AM = 5k$

b) $N(x, y) \in \Delta$, on a $AN = \frac{5}{4} |x|$?

$N \in \Delta \Rightarrow 3x + 4y + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow 4y = -3x - 8 \Rightarrow y = \frac{-3x-8}{4} = \frac{-3x-2}{4}$$

on $\vec{AN} \begin{pmatrix} x-0 \\ y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{-3x-2}{4} + 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{AN} \begin{pmatrix} x \\ \frac{-3x+6}{4} \end{pmatrix}$

d'où $AN = \|\vec{AN}\| = \sqrt{x^2 + \frac{9}{16}x^2} = \sqrt{\frac{25}{16}x^2} = \frac{5}{4}|x|$

c) si $AN = 5k \Leftrightarrow \frac{5}{4}|x| = 5k \Leftrightarrow |x| = 4k$

on $N \in \Delta \Rightarrow 3x + 4y = -8$

$$\Leftrightarrow 3(4k) + 4y = -8 \Leftrightarrow 4y = -8 - 12k$$

$$\Leftrightarrow y = -2 - 3k \Rightarrow y \in \mathbb{Z}$$

alors $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ d'où N est à coordonnées entières. Concl: AN multiple de 5 $\Rightarrow (x, y)$ est

Exercice N° 19 : Contrôle 2009

3) $a_n = 2^n + 3^n \Rightarrow a \equiv 0 \pmod{5}$

si $n=2 \Rightarrow 2^2 + 3^2 = 13 \not\equiv 0 \pmod{5}$

$\Rightarrow$ il faut que n soit impair $\Rightarrow \boxed{C}$

Exercice N° 20 : Principale 2008

1) (E): $3x - 8y = 5$

$(-1, -1)$: solution particulière de (E)

$$\Rightarrow (E): 3x - 8y = 3(-1) - 8(-1)$$

$$\Leftrightarrow 3(x+1) = 8(y+1)$$

on $3 \nmid 8 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 8k \\ y+1 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1+8k \\ y = -1+3k \end{cases}$

Réciproquement: $3(-1+8k) - 8(-1+3k) = 5$

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \{ (-1+8k, -1+3k) / k \in \mathbb{Z} \}$$

2) a) $\begin{cases} n = 2+3x \\ n = 7+8y \end{cases}$

pour identifier: $3x+2 = 8y+7$

$$\Leftrightarrow 3x - 8y = 5 \Rightarrow (x, y) \text{ sol de (E)}$$

b) (S) $\begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 7 \pmod{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2+3x \\ y = 7+8y \end{cases}$

on d'après 2) a) (x, y) solution de (E)

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 8k \\ y = -1 + 3k \end{cases} \Rightarrow n = 2 + 3(-1 + 8k)$$

$$\Leftrightarrow n = -1 + 24k \Leftrightarrow n \equiv -1 [24]$$

$$\text{also } n \equiv 23 [24]$$

$$3) a) 2^{2k} = (2^2)^k = 4^k \text{ or } 4 \equiv 1 [3]$$

$$\Rightarrow 4^k \equiv 1 [3] \Rightarrow 2^{2k} \equiv 1 [3]$$

$$7^{2k} = (7^2)^k = 49^k \text{ or } 49 \equiv 1 [8] \Rightarrow 7^{2k} \equiv 1 [8]$$

$$b) 1991 \equiv 23 [24] \Rightarrow 1991: \text{solution de (S)}$$

$$\bullet 1991 \equiv 23 [24] \Rightarrow 1991 \equiv -1 [24]$$

$$\text{also } 1991^{2008} \equiv (-1)^{2008} [24] \equiv 1 [24]$$

$$\text{also } 1991^{2008} - 1 \equiv 0 [24]$$

Exercice N° 21 Contrôle 2008

$$3) n \in \mathbb{Z}^+ / (5n) \wedge (3^2 \times 5^3 \times 7) = 35$$

$$\text{donc } 35 \mid 5n \Leftrightarrow 5n = 35k$$

$$\Leftrightarrow n = 7k \text{ also } n \equiv 0 [7]$$

$\Rightarrow \boxed{C}$